(1) $f:(-4,1] \longrightarrow R$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonunun görüntü kümesini bularak grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$f(-4) = (-4)^2 + 2.(-4) - 3 \Longrightarrow f(-4) = 16 - 8 - 3 = 5$

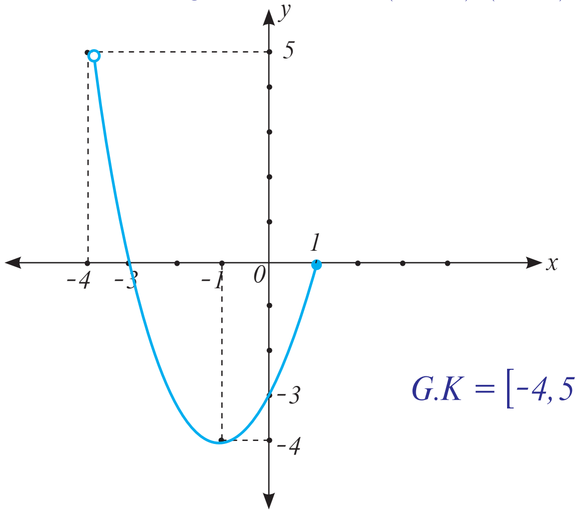
$f(1) = 1^2 + 2.1 - 3 \Longrightarrow f(1) = 1 + 2 - 3 = 0$

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2.1} = -1$

$f(-1) = (-1)^2 + 2.(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$f(x) = (x+1)^2 - 4$ biçiminde yazılırsa; $TN(-1,-4)$ olur. Eksenleri kestiği noktalar ise; $(0,-3), (-3,0), (1,0)$ dir.



$G.K = [-4,5)$

(2) $f:[1,4) \longrightarrow R$, $f(x) = x^2 - 6x$ fonksiyonunun görüntü kümesini bularak grafiğini çiziniz.

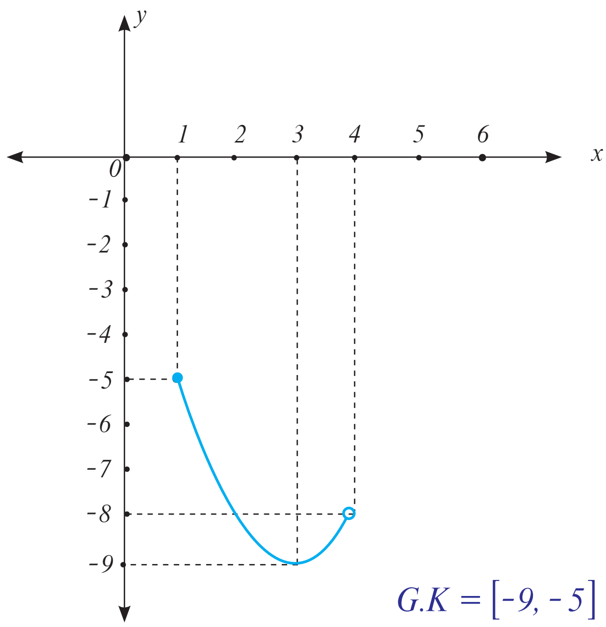
Çözüm:

$f(1) = 1^2 - 6.1 = -5$

$f(4) = 4^2 - 6.4 = -8$

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2.1} = 3 \Longrightarrow f(3) = 3^2 - 6.3 = -9$

Eksenleri kestiği noktalar; $(0,0), (6,0)$ dır.



$G.K = [-9,-5]$

(3) $f:[-3,5] \longrightarrow R$, $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm:

$\ast$ $f(-3) = -(-3)^2 - 2.(-3) + 1$

$f(-3) = -9 + 6 + 1$

$f(-3) = -2$

$\ast$ $f(5) = -5^2 - 2.5 + 1$

$f(5) = -25 - 10 + 1$

$f(5) = -34$

$\ast$ $r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2.(-1)} = -1$

$f(-1) = -(-1)^2 - 2.(-1) + 1$

$f(-1) = -1 + 2 + 1$

$f(-1) = 2$

olduğundan,

$G.K = [-34,2]$ dir.

(4) $f:[-3,2) \longrightarrow B$, $f(x) = 4x^2 + 3$ olmak üzere B kümesini bulunuz.

Çözüm:

1.Yol:

$-3 \le x < 2 \Longrightarrow 0 \le x^2 \le 9$

$\Longrightarrow 0 \le 4x^2 \le 36$

$\Longrightarrow 3 \le 4x^2 + 3 \le 39$

olduğundan, $G.K = [3,39]$ dir.

2.Yol:

$f(-3) = 4.(-3)^2 + 3$

$f(-3) = 39$

$f(2) = 4.2^2 + 3$

$f(2) = 19$

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2.4} = 0 \Longrightarrow f(0) = 4.0^2 + 3 = 3$

olduğundan, $G.K = [3,39]$ dir.

ADEM ATAY

(5) $f: A \longrightarrow [-9,5]$, $f(x) = 2x+3$ olmak üzere $f(x)$ birebir ve örten bir fonksiyondur. Buna göre, A kümesi nedir?

Çözüm:

1.Yol:

$f: A \longrightarrow B$

$x \longrightarrow f(x) = y$ olduğundan,

$-9 \le 2x+3 \le 5 \Longrightarrow -12 \le 2x \le 2 \Longrightarrow -6 \le x \le 1$

bulunur. Yani, $A = [-6, 1]$ dir.

2.Yol:

$f(x) = 2x+3$ fonksiyonu doğrusal fonksiyon olduğundan,

$2x+3 = -9 \Longrightarrow 2x = -12 \Longrightarrow x = -6$

$2x+3 = 5 \Longrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1$ dir. Dolayısıyla,

$A = [-6, 1]$ dir.

(6) $f: (-1, 3] \longrightarrow B$, $f(x) = 16 - x^2$ olmak üzere B kümesi nedir?

Çözüm:

1.Yol:

$-1 < x \le 3 \Longrightarrow 0 \le x^2 \le 9$

$\Longrightarrow -9 \le -x^2 \le 0$

$\Longrightarrow 7 \le 16 - x^2 \le 16$

olduğundan, $G.K = [7, 16]$ dir.

2.Yol:

$f(-1) = 16 - (-1)^2 = 15$

$f(3) = 16 - 3^2 = 7$

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2.(-1)} = 0 \Longrightarrow f(0) = 16 - 0^2 = 16$

olduğundan, $G.K = [7, 16]$ dir.

(7) $f: R - \{-1\} \longrightarrow R - \{6\}$ olmak üzere,

$$x = \frac{f(x) - 3}{6 - f(x)}$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:

$f: R - \{-1\} \longrightarrow R - \{6\}$ olmak üzere, $x = \dfrac{f(x) - 3}{6 - f(x)}$ ise;

1.Yol:

$f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{6-y} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{-x+6}$ dır.

2.Yol:

$x = \dfrac{f(x) - 3}{6 - f(x)} \Longrightarrow 6x - x.f(x) = f(x) - 3$

$\Longrightarrow f(x) + x.f(x) = 6x + 3$

$\Longrightarrow f(x).(1+x) = 6x + 3$

$\Longrightarrow f(x) = \dfrac{6x+3}{x+1}$

$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-x+3}{x-6} = \dfrac{x-3}{-x+6}$ dır.

(8) Tanımlı olduğu aralıkta $f(x)$ birinci dereceden bir fonksiyon,

$$f(2) = 8 \quad ve \quad f^{-1}(-3) = 1$$

olduğuna göre $f(4)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = ax + b$ olsun. Diğer taraftan,

$f(2) = 8$ ve $f^{-1}(-3) = 1 \Longrightarrow f(1) = -3$ tür. Buradan,

$f(2) = 2a + b \Longrightarrow 2a + b = 8$

$f(1) = a + b \Longrightarrow a + b = -3$ olur. Bu denklem sistemini çözecek olursak;

$$\begin{array}{rl} & 2a + \cancel{b} = 8 \\ + & -a - \cancel{b} = 3 \\ \hline & a = 11 \end{array}$$

$a = 11 \Longrightarrow b = -14$ dır.

$f(x) = 11x - 14$

$f(4) = 11.4 - 14 = 30$ elde edilir.

ADEM ATAY ADEM ATAY

(9) Tanımlı olduğu aralıkta,

$$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 6-3x$$

olduğuna göre $f^{-1}(6)$ kaçtır?

Çözüm:

$$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 6-3x$$

1.Yol:

$$f(x) = 6-3.(-3x+4)$$
$$f(x) = 6+9x-12$$
$$f(x) = 9x-6$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x+6}{9} \Longrightarrow f^{-1}(6) = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

2.yol:

$$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 6-3x \Longrightarrow \frac{4-x}{3} = f^{-1}(6-3x)$$
$$\Longrightarrow \frac{4-0}{3} = f^{-1}(6-3.0)$$
$$\Longrightarrow \frac{4}{3} = f^{-1}(6)$$

(10) $f: R-\{m\} \longrightarrow R-\{n\}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{3x-9}{2x+10}$$

olduğuna göre $m+n$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$f(x) = \frac{3x-9}{2x+10}$$
$$2m+10 = 0 \Longrightarrow 2m = -10 \Longrightarrow m = -5$$
$$f^{-1}(x) = \frac{-10x-9}{2x-3}$$
$$2n-3 = 0 \Longrightarrow 2n = 3 \Longrightarrow n = \frac{3}{2}$$
$$m+n = -5+\frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \text{ dir.}$$

(11) $x \in R^-$ olmak üzere, $f(x^3+2) = x^2-4x$ olduğuna göre $f^{-1}(21)$ kaçtır?

Çözüm:

$$f(x^3+2) = x^2-4x \Longrightarrow f^{-1}(21) = ?$$
$$f^{-1}(\underbrace{x^2-4x}_{21}) = x^3+2$$
$$x^2-4x = 21 \Longrightarrow x^2-4x-21 = 0$$
$$\Longrightarrow (x-7).(x+3) = 0$$
$$\Longrightarrow x = 7 \vee x = -3$$

$x \in R^-$ olduğundan, $x = -3$ olur. O halde,

$$f^{-1}(x^2-4x) = x^3+2$$
$$f^{-1}((-3)^2-4.(-3)) = (-3)^3+2$$
$$f^{-1}(21) = -25 \text{ dir.}$$

(12) $f: (-\infty, 4] \longrightarrow [-13, \infty)$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2-8x+3$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:

$f: (-\infty, 4] \longrightarrow [-13, \infty)$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2-8x+3$$
$$y = x^2-8x+3$$
$$y = (x-4)^2-13$$
$$y+13 = (x-4)^2$$
$$\sqrt{y+13} = |x-4|$$
$$\sqrt{y+13} = -x+4 \quad (|x-4| = -(x-4))$$
$$x = 4-\sqrt{y+13}$$
$$y = 4-\sqrt{x+13}$$
$$f^{-1}(x) = 4-\sqrt{x+13}$$

ADEM ATAY

(13) $f:[3,\infty) \longrightarrow [-14,\infty)$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2 - 6x - 5$$

olduğuna göre $f^{-1}(-13)$ kaçtır?

Çözüm:

$f:[3,\infty) \longrightarrow [-14,\infty)$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 - 6x - 5 \Longrightarrow f^{-1}(-13) = ?$

$f^{-1}(-13) = x \Longrightarrow f(x) = -13$ tür. Buradan,

$-13 = x^2 - 6x - 5$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-4).(x-2) = 0$

$x = 4 \vee x = 2$ olur. $2 \notin [3,\infty)$ olduğundan

$x = 4$ tür. Yani; $f^{-1}(-13) = 4$ olur.

(14) $f:(-\infty,4] \longrightarrow [-4,\infty)$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2 - 8x + 12$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:

$f:(-\infty,4] \longrightarrow [-4,\infty)$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 - 8x + 12 \Longrightarrow f^{-1}(x) = ?$

$y = (x-4)^2 - 4$

$y + 4 = (x-4)^2$

$\sqrt{y+4} = |x-4|$

$\sqrt{y+4} = -x + 4 \quad (|x-4| = -(x-4))$

$x = 4 - \sqrt{y+4}$

$y = 4 - \sqrt{x+4}$

$f^{-1}(x) = 4 - \sqrt{x+4}$ tür.

ADEM ATAY

ADEM ATAY

(15) $f:R \longrightarrow R$ olmak üzere,

$$f(6x+4) = 5x - 2$$

olduğuna göre $f(x+2)$ nedir?

Çözüm:

$f(6x+4) = 5x - 2 \Longrightarrow f(x+2) = ?$

$6x + 4 \longrightarrow x + 2$

$6x \longrightarrow x - 2$

$x \longrightarrow \dfrac{x-2}{6}$ yazılırsa,

$f\left(\cancel{6}.\dfrac{x-2}{\cancel{6}} + 4\right) = 5.\dfrac{x-2}{6} - 2$

$f(x+2) = \dfrac{5x - 10 - 12}{6}$

$f(x+2) = \dfrac{5x - 22}{6}$

(16) $f:\left(\frac{3}{2},\infty\right) \longrightarrow R$ olmak üzere,

$$f(x) = 4[\ln(2x-3)] + 2$$

ise $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:

$f:\left(\frac{3}{2},\infty\right) \longrightarrow R$ olmak üzere,

$f(x) = 4[\ln(2x-3)] + 2 \Longrightarrow f^{-1}(x) = ?$

$y = 4[\ln(2x-3)] + 2$

$y - 2 = 4[\ln(2x-3)]$

$\dfrac{y-2}{4} = \ln(2x-3)$

$2x - 3 = e^{\frac{y-2}{4}}$

$2x = 3 + e^{\frac{y-2}{4}}$

$x = \dfrac{3 + e^{\frac{y-2}{4}}}{2} \Longrightarrow y = \dfrac{3 + e^{\frac{x-2}{4}}}{2}$

$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{3 + e^{\frac{x-2}{4}}}{2}$ dir.

(17) $f:(2,\infty) \longrightarrow R$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{3-\log(x-2)}{4}$$

ise $f^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm:

$f:(2,\infty) \longrightarrow R$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{3-\log(x-2)}{4} \Longrightarrow f^{-1}(x) = ?$$

$$y = \frac{3-\log(x-2)}{4}$$

$$4y = 3-\log(x-2)$$

$$\log(x-2) = 3-4y$$

$$x-2 = 10^{3-4y}$$

$$x = 2+10^{3-4y}$$

$$y = 2+10^{3-4x}$$

$$f^{-1}(x) = 2+10^{3-4x}$$

(18) $(fog)(x) = 4x+1$ ve $g(x) = 3x+2$ olduğuna göre $f(x)$ nedir?

Çözüm:

$$(fog)(x) = 4x+1 \text{ ve } g(x) = 3x+2 \Longrightarrow f(x) = ?$$

$$f(g(x)) = 4x+1$$

$$f(3x+2) = 4x+1$$

$$f\left(\cancel{3}.\frac{x-2}{\cancel{3}}+2\right) = 4.\frac{x-2}{3}+1$$

$$f(x) = \frac{4x-8+3}{3}$$

$$f(x) = \frac{4x-5}{3}$$

(19) $f,g:R \longrightarrow R$ olmak üzere,

$$g(x) = x-2 \quad \text{ve} \quad (gof^{-1})^{-1}(x) = 4x+1$$

olduğuna göre $f(3)$ kaçtır?

Çözüm:

$$g(x) = x-2 \text{ ve } (gof^{-1})^{-1}(x) = 4x+1 \Longrightarrow f(3) = ?$$

$$(gof^{-1})^{-1}(x) = (fog^{-1})(x) \text{ tir.}$$

$$(fog^{-1})(x) = f(g^{-1}(x))$$

$$4x+1 = f(x+2)$$

$$4(x-2)+1 = f(x-2+2)$$

$$4x-7 = f(x)$$

$$f(3) = 4.3-7 = 5 \text{ dir.}$$

(20) R de tanımlı f ve g fonksiyonları için

$$f(x) = (m+4)x+n-6$$

$$(gof)(x) = g(x)$$

olduğuna göre $m+n$ kaçtır?

Çözüm:

$$f(x) = (m+4)x+n-6 \quad \text{ve} \quad (gof)(x) = g(x)$$

$$(gof)(x) = g(x)$$

$$g(f(x)) = g(x)$$

$$f(x) = x \quad \text{dir.Buna göre,}$$

$$\left.\begin{array}{l} m+4 = 1 \Longrightarrow m = -3 \\ n-6 = 0 \Longrightarrow n = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow m+n = -3+6 = 3 \text{ tür.}$$

AYTAÇ ADEM

(21) $f(x^2-4x+2) = 12x-3x^2+2$ ise $f(x)$ nedir?

Çözüm:

$f(x^2-4x+2) = 12x-3x^2+2 \Longrightarrow f(x) = ?$

$f(x^2-4x+2) = -3(x^2-4x+2)+8$

$f(x) = -3x+8$ olur.

(22) $f\left(x-\frac{1}{x}\right) = \dfrac{x^4-6x^2+1}{x^2}$ ise $f(x)$ nedir?

Çözüm:

$f\left(x-\frac{1}{x}\right) = \dfrac{x^4-6x^2+1}{x^2} \Longrightarrow f(x) = ?$

$f\left(x-\frac{1}{x}\right) = x^2+\dfrac{1}{x^2}-6$

$f\left(x-\frac{1}{x}\right) = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2-4$

$f(x) = x^2-4$ tür.

(23) $f(x) = 3x-4$ ise $f(2x+1)$ in $f(x)$ cinsinden eşiti nedir?

Çözüm:

$f(x) = 3x-4$ ise $f(2x+1)$ in $f(x)$ cinsinden nedir?

$$\begin{aligned} f(2x+1) &= 3(2x+1)-4 \\ &= 6x-1 \\ &= \cancel{6}.\frac{f(x)+4}{\cancel{3}}-1 \\ &= 2f(x)+7 \end{aligned}$$

$\left(f(x) = 3x-4 \Longrightarrow f(x)+4 = 3x \Longrightarrow \dfrac{f(x)+4}{3} = x\right)$

(24) $f(x) = 4x-2$ ise $f(x+2)$ nin $f(x-1)$ cinsinden eşiti nedir?

Çözüm:

$f(x) = 4x-2$ ise $f(x+2)$ nin $f(x-1)$ cinsinden $= ?$

$f(x-1) = 4(x-1)-2$

$f(x-1) = 4x-6 \Longrightarrow 4x = f(x-1)+6$

$\Longrightarrow x = \dfrac{f(x-1)+6}{4}$

$f(x+2) = 4(x+2)-2$

$f(x+2) = 4x+6$

$f(x+2) = \cancel{4}.\dfrac{f(x-1)+6}{\cancel{4}}+6$

$f(x+2) = f(x-1)+12$

ADEM ATAY

ADEM ATAY

(25) $f(x)=\dfrac{x+3}{x}$ ise $f(x-3)$ ün $f(x)$ cinsinden eşiti nedir?

Çözüm:

$f(x)=\dfrac{x+3}{x}$ ise $f(x-3)$ ün $f(x)$ cinsinden $=\ ?$

$$x.f(x)=x+3 \Longrightarrow x.f(x)-x=3$$
$$\Longrightarrow x(f(x)-1)=3$$
$$\Longrightarrow x=\frac{3}{f(x)-1}$$

$$f(x-3)=\frac{x\cancel{-3}\cancel{+3}}{x-3}=\frac{x}{x-3}=\frac{\dfrac{3}{f(x)-1}}{\dfrac{3}{f(x)-1}-3}$$
$$=\frac{3}{\cancel{f(x)-1}}.\frac{\cancel{f(x)-1}}{-3f(x)+6}$$
$$=\frac{3}{-3f(x)+6}$$
$$=\frac{1}{-f(x)+6}$$

(27) $f:R-\{3\}\longrightarrow R-\{-2\}$, $f(x)=\dfrac{mx+6}{2x-n}$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonu birebir ve örten ise (m,n) sıralı ikilisi nedir?

Çözüm:

$f:R-\{3\}\longrightarrow R-\{-2\}$, $f(x)=\dfrac{mx+6}{2x-n}$, $(m,n)=\ ?$

$2.3-n=0\Longrightarrow n=6$

$f^{-1}(x)=\dfrac{nx+6}{2x-m}$ dir.Buna göre,

$2.(-2)-m=0\Longrightarrow m=-4$ olur.

$(m,n)=(-4,6)$ dır.

(26) $f(x+1)=\dfrac{3x-2}{2}$ ise $f^{-1}(x)$ in $f(x+2)$ cinsinden eşiti nedir?

Çözüm:

$f(x+1)=\dfrac{3x-2}{2}$ ise $f^{-1}(x)$ in $f(x+2)$ cinsinden $=\ ?$

x yerine $x+1$ yazarsak $f(x+2)$ yi elde ederiz.

$$f(x+2)=\frac{3(x+1)-2}{2}=\frac{3x+1}{2}$$
$$3x+1=2f(x+2)\Longrightarrow 3x=2f(x+2)-1$$
$$\Longrightarrow x=\frac{2f(x+2)-1}{3}$$
$$f(x-1+1)=\frac{3(x-1)-2}{2}\Longrightarrow f(x)=\frac{3x-5}{2}$$

$f^{-1}(x)=\dfrac{-2x-5}{-3}=\dfrac{2x+5}{3}$ tür.

$$f^{-1}(x)=\frac{2.\dfrac{2f(x+2)-1}{3}+5}{3}$$

$f^{-1}(x)=\dfrac{4f(x+2)+12}{9}$ bulunur.

(28) $f:R-\{-6\}\longrightarrow R-\{3\}$, $f(x)=\dfrac{ax-4}{3x+b}$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonu birebir ve örten ise $a+b$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$f:R-\{-6\}\longrightarrow R-\{3\}$, $f(x)=\dfrac{ax-4}{3x+b}$ ise $a+b=\ ?$

$3.(-6)+b=0\Longrightarrow b=18$

$f^{-1}(x)=\dfrac{-bx-4}{3x-a}$ olduğundan,

$3.3-a=0\Longrightarrow a=9$

$a+b=9+18=27$

A D E M A T A Y

A D E M A T A Y

(29) Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift olup olmadıklarını inceleyiniz.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x$
b) $f(x) = x^2 + cosx$
c) $f(x) = 2x^3 + x^2$
d) $f(x) = x^2 - cosx$
e) $f(x) = sinx + tanx$
f) $f(x) = x^3 - sinx$
g) $f(x) = x^4 - x$
h) $f(x) = sin2x + x$

Çözüm:

a) $f(x) = 4x^3 + 3x$
$f(-x) = 4.(-x)^3 + 3(-x)$
$f(-x) = -4x^3 - 3x$
$f(-x) = -(4x^3 + 3x)$
$f(-x) = -f(x)$ old.tektir.

b) $f(x) = x^2 + cosx$
$f(-x) = (-x)^2 + cos(-x)$
$f(-x) = x^2 + cosx$
$f(-x) = f(x)$ old.çifttir.

c) $f(x) = 2x^3 + x^2$
$f(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2$
$f(-x) = -2x^3 + x^2$
$f(-x) \neq f(x)$ ve $f(-x) \neq -f(x)$ old. f ne tek ne de çifttir.

d) $f(x) = x^2 - cosx$
$f(-x) = (-x)^2 - cos(-x)$
$f(-x) = x^2 - cosx$
$f(-x) = f(x)$ old.tektir.

e) $f(x) = sinx + tanx$
$f(-x) = sin(-x) + tan(-x)$
$f(-x) = -sinx - tanx$
$f(-x) = -(sinx + tanx)$
$f(-x) = -f(x)$ old.tektir.

f) $f(x) = x^3 - sinx$
$f(-x) = (-x)^3 - sin(-x)$
$f(-x) = -x^3 + sinx$
$f(-x) \neq f(x)$ veya $f(-x) \neq f(x)$ old.f, ne tek ne de çifttir.

g) $f(x) = x^4 - x$
$f(-x) = (-x)^4 - (-x)$
$f(-x) = x^4 + x$
$f(-x) \neq f(x)$ veya $f(-x) \neq -f(-x)$ old. f, ne tek ne de çifttir.

h) $f(x) = sin2x + x$
$f(-x) = sin2(-x) + (-x)$
$f(-x) = -sin2x - x$
$f(-x) = -(sin2x + x)$
$f(-x) = -f(x)$ old. tektir.

(30) $f(x)$ tek fonksiyondur.

$$f(x) + 3f(-x) = 4x^5 + 2x^3 - 6x$$

ise $f(-1)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x)$ tek fonk. ve $f(x) + 3f(-x) = 4x^5 + 2x^3 - 6x$
$f(-1) = ?$
$f(-x) = -f(x)$ dir.
$f(x) + 3.(-f(x)) = 4x^5 + 2x^3 - 6x$
$f(x) - 3f(x) = 4x^5 + 2x^3 - 6x$
$-2f(x) = 4x^5 + 2x^3 - 6x$
$-2f(-1) = 4.(-1)^5 + 2.(-1)^3 - 6.(-1)$
$-2f(-1) = -4 - 2 + 6$
$-2f(-1) = 0$
$f(-1) = 0$

ADEM ATAY
ADEM ATAY

(31) $f(x)$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir.

$$f(x) = (a+2)x^3 + (a+5)x^2 + (b+3)x + a.b$$

ise $f(-1)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olduğundan çift fonksiyondur. O halde derecesi tek olan terimleri yok etmeliyiz. Dolayısıyla,

$f(x) = (a+2)x^3 + (a+5)x^2 + (b+3)x + a.b$

$a+2=0 \Longrightarrow a=-2$

$b+3=0 \Longrightarrow b=-3$

$f(x) = 2x^2 + 6$ olur.

$f(-1) = 2.(-1)^2 + 6$

$f(-1) = 8$ dir.

(32) $f(x)$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

$$f(x) = (m-3)x^4 - (n+4)x^2 - (m+n)x$$

ise $f(-2)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu tektir. Dolayısıyla, dereceleri çift olan terimleri yok etmeliyiz.

$$f(x) = (m-3)x^4 - (n+4)x^2 - (m+n)x$$

$m-3=0 \Longrightarrow m=3$

$n+4=0 \Longrightarrow n=-4$

$f(x) = -(3-4)x$

$f(x) = x$

$f(-2) = -2$ dir.

(33) $f(x)$ tek, $g(x)$ tek ve $h(x)$ çift fonksiyon olmak üzere,

$$f(-6)=-4 \;,\; g(-4)=-6 \;,\; h(-2)=4$$

olduğuna göre, $(fogoh)(2)$ ifadesinin eşiti nedir?

Çözüm:

$f(x)$ tek, $g(x)$ tek ve $h(x)$ çift fonksiyon;

$f(-6)=-4 \;,\; g(-4)=-6 \;,\; h(-2)=4$

$$\begin{aligned}(fogoh)(2) &= f(g(h(2))) = f(g(h(-2)))\\ &= f(g(4))\\ &= f(-g(-4))\\ &= f(6)\\ &= -f(-6)\\ &= 4\end{aligned}$$

(34) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-4x+3}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

Paydayı sıfır yapan x değerleri fonksiyonu tanımsız yapacağından R den bu değerler çıkarılmalıdır.

$x^2-4x+3=0 \Longrightarrow (x-3).(x-1)=0$

$\Longrightarrow x=3 \vee x=1$

$T.K = R - \{1,3\}$

A D E M   A T A Y

A D E M   A T A Y

(35) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - 2x + 8}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

$x^2 - 2x + 8 = 0$ eşitliğini sağlayan x reel sayıları olmadığından tanım kümesi R dir.

$$\left(\begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-2)^2 - 4.1.8 \\ \Delta = -28 < 0 \text{ old.} \end{array}\right)$$

(36) $f(x) = \dfrac{x-2}{||x+2|-3|-5}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

$||x+2|-3|-5 = 0$

$||x+2|-3| = 5$ olur ki buna göre,

$|x+2|-3 = 5 \quad \vee \quad |x+2|-3 = -5$

$|x+2| = 8 \quad \vee \quad |x+2| \neq -2$

$x+2 \geq 0 \Longrightarrow x+2 = 8 \Longrightarrow x = 6$

$x+2 < 0 \Longrightarrow x+2 = -8 \Longrightarrow x = -10$

olur.O halde;

$T.K = \{-10, 6\}$

ADEM ATAY

(37) $f(x) = \sqrt{8x - x^2} + \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{x-4}}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = \sqrt{8x - x^2} + \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{x-4}}$ fonksiyonu için,

$8x - x^2 \geq 0$ ve $x - 4 \neq 0$ olmalıdır.

$x - 4 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 4$

$8x - x^2 \geq 0$ için,

$x(8-x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 8$

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
$8x - x^2 \geq 0$		$-$		$+$		$-$	

$T.K = [0, 8] - \{4\}$

(38) $f(x) = \sqrt{10 - |x+1|}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = \sqrt{10 - |x+1|}$ fonksiyonu için,

$10 - |x+1| \geq 0$ olmalıdır.Buna göre,

$|x+1| \leq 10 \Longrightarrow -10 \leq x+1 \leq 10$

$\Longrightarrow -11 \leq x \leq 9$

$T.K = [-11, 9]$

ADEM ATAY

(39) $f(x) = \log_{(9-x)}(x-4)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = \log_{(9-x)}(x-4)$ fonksiyonu için;

$9-x>0$, $9-x \neq 1$, $x-4>0$ olmalıdır.

$9-x>0 \Longrightarrow x<9$

$9-x \neq 1 \Longrightarrow x \neq 8$

$x-4>0 \Longrightarrow x>4$ elde edilir. O halde;

$T.K = (4,9)-\{8\}$ dir.

(40) $f(x) = \sqrt{3-\log_2(x-5)}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = \sqrt{3-\log_2(x-5)}$ fonksiyonu için;

$3-\log_2(x-5) \geq 0$ ve $x-5>0$ olmalıdır.

Buna göre,

$\log_2(x-5) \leq 3 \Longrightarrow x-5 \leq 2^3 \Longrightarrow x \leq 13$

$x-5>0 \Longrightarrow x>5$

dir. O halde,

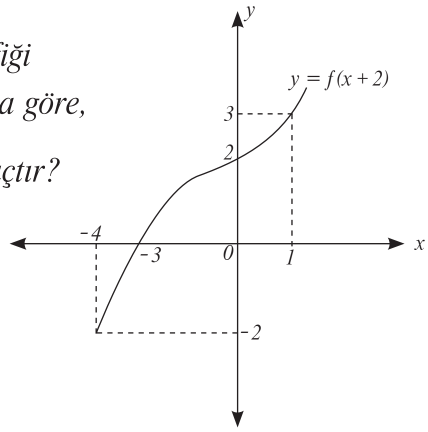
$T.K = (5,13]$

dir.

(41)

$y = f(x+2)$ nin grafiği şekildeki gibidir. Buna göre,

$$\frac{f(3)+f(-1)}{f^{-1}(-2)+f^{-1}(3)}$$ kaçtır?



Çözüm:

$y = f(x+2) \Longrightarrow f^{-1}(y) = x+2$

$f(3) = 3$

$f(-1) = 0$

$f^{-1}(-2) = -4+2 = -2$

$f^{-1}(3) = 1+2 = 3$

$$\frac{f(3)+f(-1)}{f^{-1}(-2)+f^{-1}(3)} = \frac{3+0}{-2+3} = \frac{3}{1} = 3$$

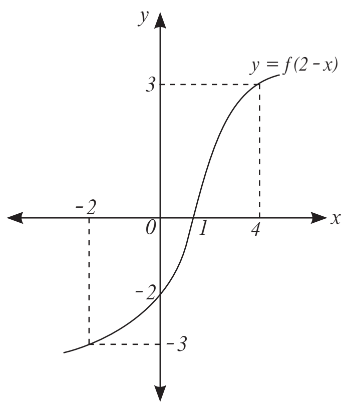
(42)

$y = f(2-x)$ in grafiği şekildeki gibidir.

Buna göre,

$$\frac{f^{-1}(-3)+f^{-1}(0)}{f(2)+f(-2)}$$

kaçtır?



Çözüm:

$y = f(2-x) \Longrightarrow f^{-1}(y) = 2-x$

$f(2) = -2$

$f(-2) = 3$

$f^{-1}(-3) = 2-(-2) = 4$

$f^{-1}(0) = 2-1 = 1$

$$\frac{f^{-1}(-3)+f^{-1}(0)}{f(2)+f(-2)} = \frac{4+1}{-2+3} = \frac{5}{1} = 5$$

ADEM ATAY

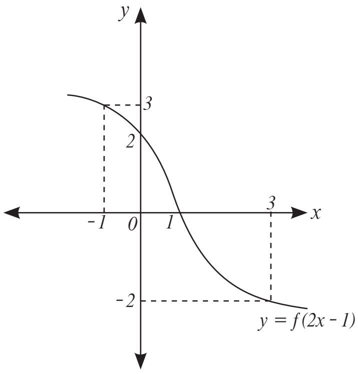
(43)

$y = f(2x - 1)$ in grafiği şekildeki gibidir.

Buna göre,

$$\frac{f(1)+f^{-1}(2)}{f^{-1}(-2)+f(-3)}$$

kaçtır?



Çözüm:

$y = f(2x-1) \Longrightarrow f^{-1}(y) = 2x - 1$

$f(1) = 0$

$f(-3) = 3$

$f^{-1}(2) = -1$

$f^{-1}(-2) = 5$

$$\frac{f(1)+f^{-1}(2)}{f^{-1}(-2)+f(-3)} = \frac{0-1}{5+3} = -\frac{1}{8}$$

(45) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 2 \\ x-4 & , x \geq 2 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$y = 2x + 1$ için;

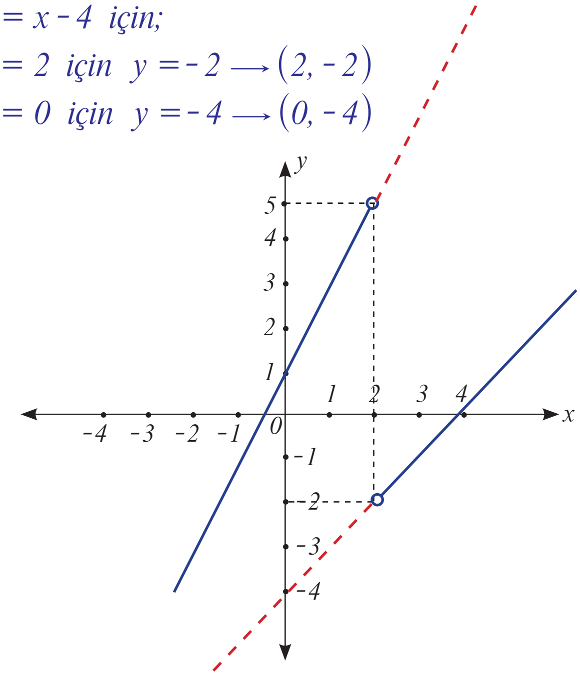
$x = 2$ için $y = 5 \longrightarrow (2,5)$

$x = 0$ için $y = 1 \longrightarrow (0,1)$

$y = x - 4$ için;

$x = 2$ için $y = -2 \longrightarrow (2,-2)$

$x = 0$ için $y = -4 \longrightarrow (0,-4)$



(44) $f(x) = \begin{cases} x+2 & , x > 1 \\ 2x-6 & , x \leq 1 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$y = x + 2$ için;

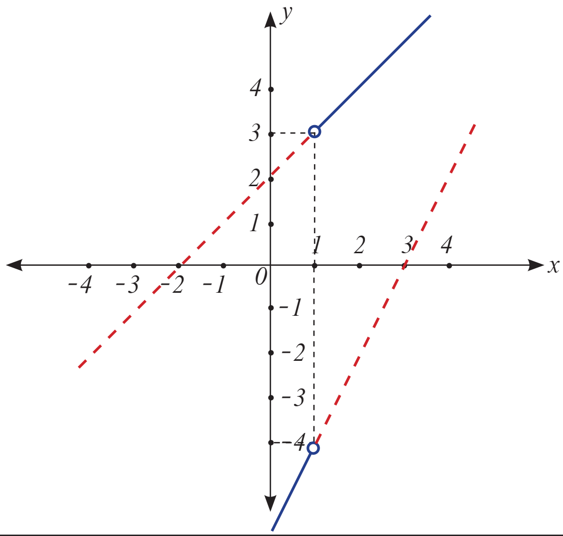
$y = 0$ için $x = -2 \longrightarrow (-2,0)$

$x = 1$ için $y = 0 \longrightarrow (1,3)$

$y = 2x - 6$ için;

$x = 1$ için $y = -2 \longrightarrow (1,-4)$

$y = 0$ için $x = 3 \longrightarrow (3,0)$ dır.



(46) $f(x) = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ 3 & , 0 < x < 1 \\ x+2 & , x \geq 1 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

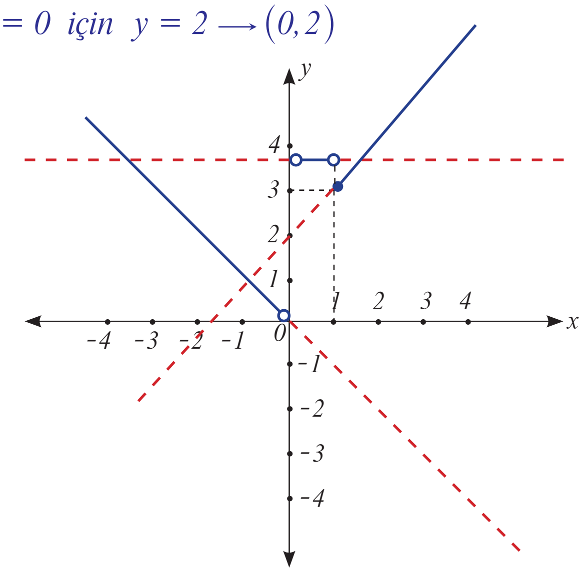
Çözüm:

$y = -x$ ve $y = 3$ doğrularının çizimini direkt gösterebiliriz.

$y = x + 2$ için;

$x = 1$ için $y = 3 \longrightarrow (1,3)$

$x = 0$ için $y = 2 \longrightarrow (0,2)$



ADEM ATAY

ADEM ATAY

(47) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & , x < 1 \\ 0 & , x = 1 \\ x^2 - 1 & , x > 1 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$x = 1$ iken $y = 0$ ise $(1,0)$ noktasıdır.

$y = x^2 - 4x$ parabolü için;

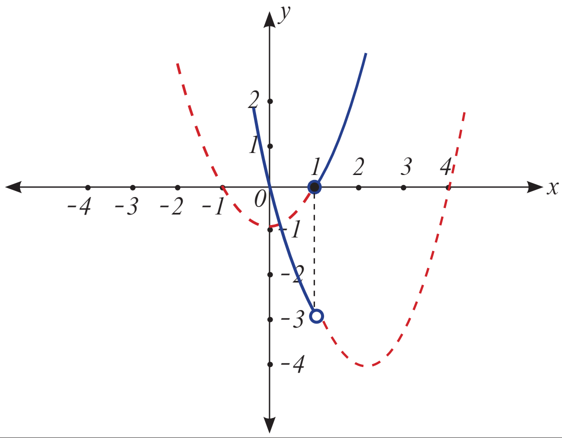
Eksenleri kestiği noktalar; $(0,0)$ ve $(4,0)$ dır.

Tepe noktası; $TN(0,-4)$ tür.

$y = x^2 - 1$ parabolü için;

Eksenleri kestiği noktalar; $(-1,0)$ ve $(1,0)$ dır.

Tepe noktası; $TN(0,-1)$ dir.



(48) $|x| - 3x = 12$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$|x| - 3x = 12 \Longrightarrow |x| = 3x + 12$ dir.

$x \geq 0$ iken;
$x = 3x + 12$
$-2x = 12$
$x = -6$

$x < 0$ iken;
$-x = 3x + 12$
$-4x = 12$
$x = 3$

$-6 \geq 0$ olmadığından çözüm kümesine -6 değerini alamayız. Dolayısıyla,

$Ç = \{3\}$

olur.

(49) $|x+2| - x = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$|x+2| - x = 6 \Longrightarrow |x+2| = x + 6$

$\divideontimes$ $x + 2 \geq 0$ $(x \geq -2)$ iken;

$x + 2 = x + 6$

$2 \neq 6$

$Ç_1 = \varnothing$

$\divideontimes$ $x + 2 < 0$ $(x < -2)$ iken;

$-x - 2 = x + 6$

$-2x = 8$

$x = -4$ $(-4 < -2)$ olduğundan;

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \{-4\}$ olur.

(50) $|x-3| + |x-2| = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$

$x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$

x	$-\infty$ ... 2	... 3	... $+\infty$
$\lvert x-2 \rvert$	$-x+2$	$x-2$	$x-2$
$\lvert x-3 \rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$\lvert x-3 \rvert + \lvert x-2 \rvert = 5$	$-x+2-x+3=5$ $-2x=0$ $x=0$	$x-2-x+3=5$ $1 \neq 5$	$x-2+x-3=5$ $2x=10$ $x=5$

$Ç = \{0, 5\}$

ADEM ATAY
ADEM ATAY

(51) $|x+1|+|x-4|=7$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm:

$x+1=0 \Longrightarrow x=-1$

$x-4=0 \Longrightarrow x=4$

x	$-\infty \quad\quad -1$	4	$+\infty$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\|x-4\|$	$-x+4$	$-x+4$	$x-4$
$\|x+1\|+\|x-4\|=7$	$-x-1-x+4=7$ $-2x=4$ $x=-2$	$x+1-x+4=7$ $5\neq 7$	$x+1+x-4=7$ $2x=10$ $x=5$

$Ç=\{-2,5\}$

(53) $||x+2|-x|=7$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm:

$||x+2|-x|=7$

$|x+2|-x=7 \quad \vee \quad |x+2|-x=-7$

1.Durum:

$|x+2|-x=7 \Longrightarrow |x+2|=x+7$

$*$ $x+2\geq 0$ $(x\geq -2)$ *iken;*

$x+2=x+7$

$2\neq 7$

$*$ $x+2<0$ $(x<-2)$ *iken;*

$-x-2=x+7$

$-2x=9$

$x=-\frac{9}{2}\in(-\infty,-2)$

2.Durum:

$|x+2|-x=-7 \Longrightarrow |x+2|=x-7$

$*$ $x+2\geq 0$ $(x\geq -2)$ *iken;*

$x+2=x-7$

$2\neq -7$

$*$ $x+2<0$ $(x<-2)$ *iken;*

$-x-2=x-7$

$-2x=-5$

$x=\frac{5}{2}\notin(-\infty,-2)$

$Ç=\left\{-\frac{9}{2}\right\}$

(52) $||x+4|-2|=6$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm:

$||x+4|-2|=6$

$||x+4||-2=6 \quad \vee \quad ||x+4|-2|=-6$

$Ç=\varnothing$

$|x+4|-2=6 \Longrightarrow |x+4|=8$

$*$ $x+4\geq 0$ $(x\geq -4)$ *iken;*

$x+4=8$

$x=4$

$*$ $x+4<0$ $(x<-4)$ *iken;*

$x+4=-8$

$x=-12$

$Ç=\{-12,4\}$

(54) $5\leq |x+4|<9$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm:

$5\leq |x+4|<9$

$5\leq x+4<9 \quad \vee \quad 5\leq -x-4<9$

$1\leq x<5 \quad\quad 9\leq -x<13$

$-13<x\leq -9$

$Ç=(-13,-9]\cup[1,5)$

ADEM ATAY

ADEM ATAY

(55) $f(x) = |x-9|-|x+5|$ fonksiyonunun görüntü kümesinde kaç tane tamsayı vardır?

Çözüm:

$x-9=0 \Longrightarrow x=9$

$x+5=0 \Longrightarrow x=-5$

x	$-\infty$ ⋯ -5	-5 ⋯ 9	9 ⋯ $+\infty$
$\lvert x+5\rvert$	$-x-5$	$x+5$	$x+5$
$\lvert x-9\rvert$	$-x+9$	$-x+9$	$x-9$
$\lvert x-9\rvert-\lvert x+5\rvert$	$-x+9-(-x-5)=14$	$-x+9-(x+5)=-2x+4$	$x-9-(x+5)=-14$

Görüntü kümesinin, $14-(-14)+1=29$ tane elemanı vardır.

(56) $|x+3|+|x-2|<7$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

$x+3=0 \Longrightarrow x=-3$

$x-2=0 \Longrightarrow x=2$

x	$-\infty$ ⋯ -3	-3 ⋯ 2	2 ⋯ $+\infty$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$\lvert x+3\rvert+\lvert x-2\rvert<7$	$-x-3-x+2<7$ $-2x<8$ $x>-4$	$x+3-x+2<7$ $5<7$	$x+3+x-2<7$ $2x<6$ $x<3$
	$Ç_1=(-4,-3]$	$Ç_2=[-3,2]$	$Ç_3=[2,3)$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3$

$Ç = (-4,3)$

(57) $|x-8|-|x-4|<6$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

$x-8=0 \Longrightarrow x=8$

$x-4=0 \Longrightarrow x=4$

x	$-\infty$ ⋯ 4	4 ⋯ 8	8 ⋯ $+\infty$
$\lvert x-8\rvert$	$-x+8$	$-x+8$	$x-8$
$\lvert x-4\rvert$	$-x+4$	$x-4$	$x-4$
$\lvert x-8\rvert-\lvert x-4\rvert<6$	$-x+8+x-4<6$ $4<6$	$-x+8-x+4<6$ $-2x<-6$ $x>3$	$x-8-x+4<6$ $-4<6$
	$Ç_1=(-\infty,4]$	$Ç_2=[4,8]$	$Ç_3=[8,\infty)$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3$

$Ç = R$ dir.

(58) $f: R \longrightarrow R$, $f(x) = |x^2-4x+3|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

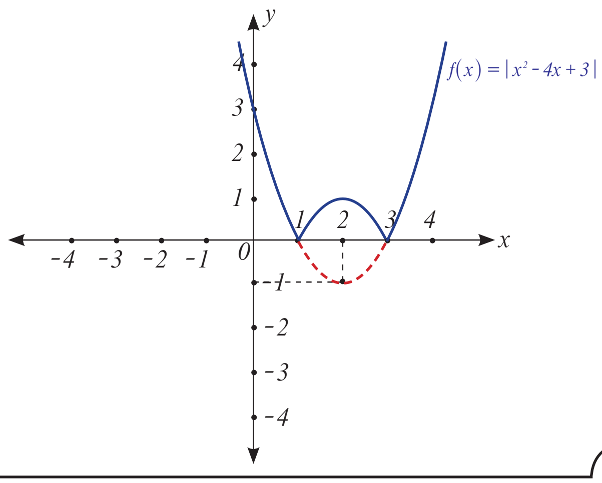
$f(x) = x^2-4x+3$ fonksiyonunun grafiğini çizip, x ekseninin altında kalan kısımın, x eksenine göre simetrisi ile x ekseninin üstünde kalan kısımın birleşimini alacağız. Buna göre,

$y = x^2-4x+3$

$y = (x-2)^2-1$ olarak kısaca yazabiliriz.

Dolayısıyla, $TN(2,-1)$ olur.

Eksenleri kestiği noktalar; $(0,3),(1,0),(3,0)$ dır.



ADEM ATAY
ADEM ATAY

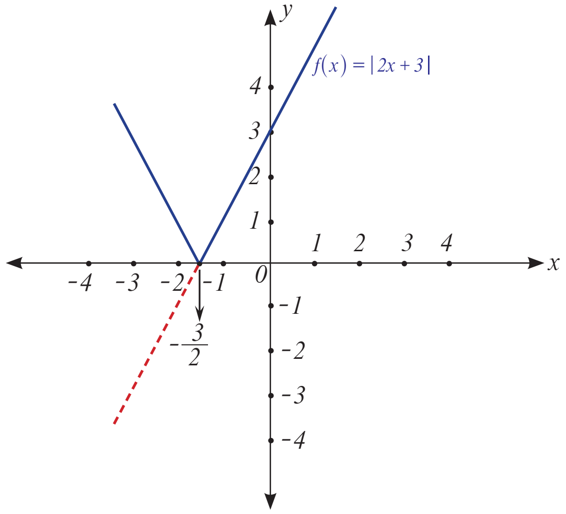
(59) $f: R \longrightarrow R$, $f(x) = |2x+3|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Öncelikle $y = 2x+3$ doğrusunun grafiğini çizeceğiz.

$x = 0$ için $y = 3 \longrightarrow (0,3)$

$y = 0$ için $x = -\dfrac{3}{2} \longrightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$



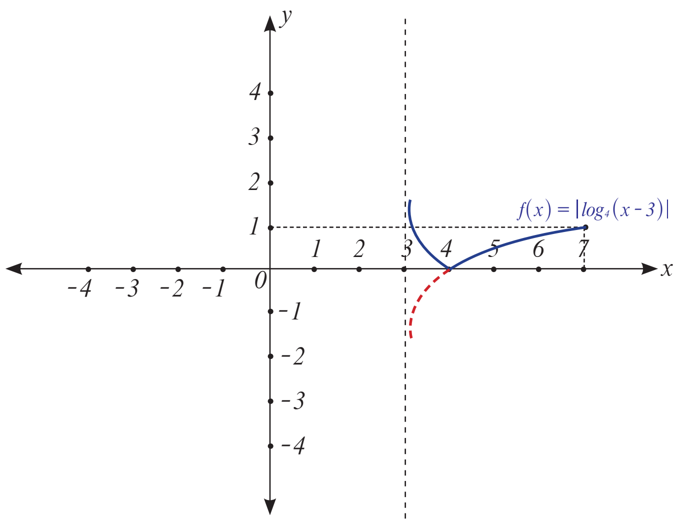
(60) $f: (3,\infty) \longrightarrow R$, $f(x) = |log_4 (x-3)|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$y = log_4 (x-3)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$x = 4$ için $y = log_4 1 = 0 \Longrightarrow (4,0)$

$x = 7$ için $y = log_4 4 = 1 \Longrightarrow (7,1)$



(61) $f: R \longrightarrow R$, $f(x) = |x+1| + |x-1|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

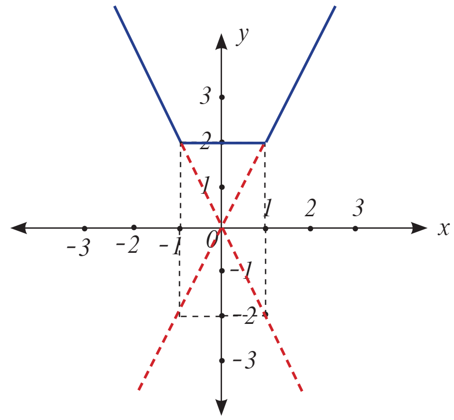
Çözüm:

$x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$

$x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	
$\|x-1\|$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	
$\|x+1\|+\|x-1\|$	$-2x$	2	$2x$	

$$f(x) = \begin{cases} -2x & , x < -1 \\ 2 & , -1 \le x < 1 \\ 2x & , x \ge 1 \end{cases}$$



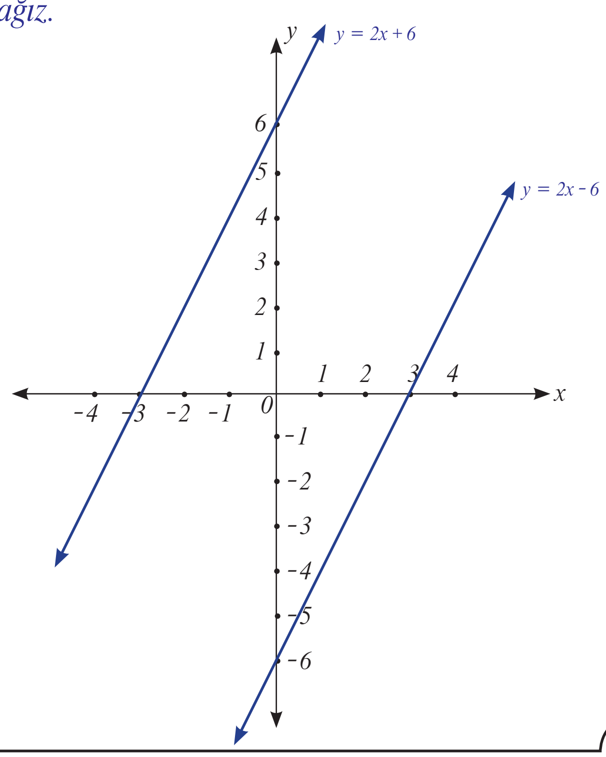
(62) $|y - 2x| = 6$ bağıntısının grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$|y - 2x| = 6 \Longrightarrow y - 2x = 6 \quad \vee \quad y - 2x = -6$

$\Longrightarrow y = 2x + 6 \quad \vee \quad y = 2x - 6$

doğrularının grafiklerini ayrı ayrı çizip, birleşimini alacağız.



ADEM ATAY

(63) $|y+1| = x$ bağıntısının grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$|y+1| = x$ bağıntısı için;

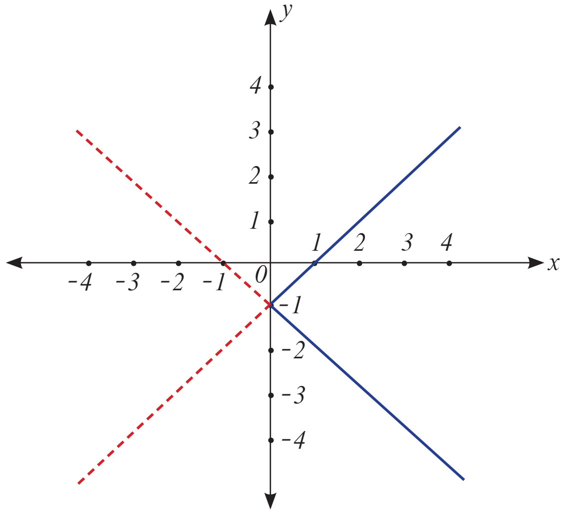
⁕ $y+1 \geq 0$ $(y \geq -1)$ iken,

$y+1 = x \Longrightarrow y = x-1$

⁕ $y+1 < 0$ $(y < -1)$ iken,

$-y-1 = x \Longrightarrow y = -x-1$ dir. Buna göre,

$|y+1| = x$ bağıntısının grafiği aşağıdaki gibidir.



(64) $|y+2| = x-1$ bağıntısının grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$|y+2| = x-1$ bağıntısı için;

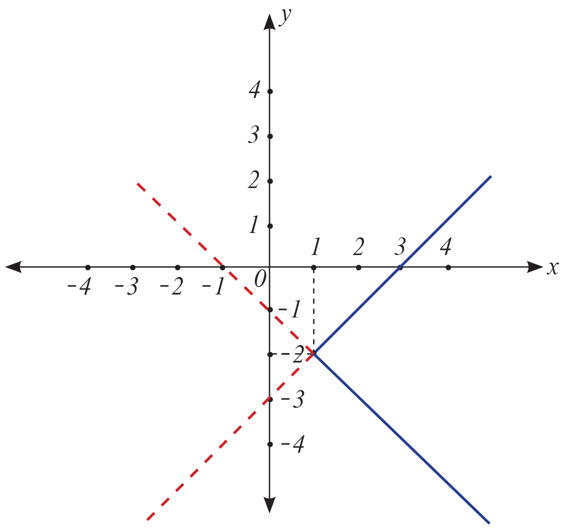
⁕ $y+2 \geq 0$ $(y \geq -2)$ iken,

$y+2 = x-1 \Longrightarrow y = x-3$

⁕ $y+2 < 0$ $(y < -2)$ iken,

$-y-2 = x-1 \Longrightarrow y = -x-1$ olur. Buna göre,

$|y+2| = x-1$ bağıntısının grafiği aşağıdaki gibidir.



ADEM ATAY

ADEM ATAY